Centro de Estudios ILLICE

PRUEBA LIBRE DE GRADUADO EN ESO

MATEMÁTICAS

ÍNDICE

Tema 1 Números, jerarquía y calculadora 5
Tema 2 Fracciones y decimales 17
Tema 3 Proporcionalidad, porcentajes e IVA 31
Tema 4 Potencias y notación científica 53
Tema 5 Lenguaje algebraico y ecuaciones 63
Tema 6 Sistemas de dos ecuaciones 79
Tema 7 La medida y las unidades 91
Tema 8 Perímetros y áreas 103
Tema 9 Cuerpos geométricos y el teorema de Pitágoras 123
Tema 10 Funciones y función lineal 137
Tema 11 Estadística y probabilidad 155
Anexo A Formulario, vocabulario y esquemas de consulta 175
Anexo B Ejercicios resueltos 187
Anexo C Las cinco últimas convocatorias, resueltas 229

Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

Centro de Estudios ILLICE

PRUEBA LIBRE DE GRADUADO EN ESO

MATEMÁTICAS

NÚMEROS, JERARQUÍA Y CALCULADORA

1

Muchos adultos llevan quince o veinte años sin hacer una cuenta escrita. Sabe pagar y sabe cuándo un precio no le cuadra; lo que ha perdido es la costumbre de poner la operación por escrito y de fiarse del resultado. Esa costumbre se recupera antes de lo que parece.

Todo lo que viene después —fracciones, porcentajes, proporciones, ecuaciones, geometría, estadística— se apoya en este tema: no hay una sola cuenta que se resuelva sin sumar, restar, multiplicar o dividir, sin decidir qué se hace antes y qué después, y sin escribir el resultado con los decimales que toca. Hay además una ventaja que conviene aprovechar desde el primer día: la **calculadora básica**, que casi siempre se usa a medias.

LO QUE HAY QUE SABER HACER AL TERMINAR

- Leer, escribir, ordenar y comparar números con decimales, y decir cuánto vale cada cifra.
- Sumar, restar, multiplicar y dividir con decimales y con negativos, y multiplicar y dividir por 10, 100 y 1.000 moviendo la coma.
- Resolver una cuenta con varias operaciones y paréntesis en el orden correcto, y manejar la calculadora básica: encadenarla, usar la memoria y comprobar.
- Redondear a dos decimales, dejarlo escrito, y hallar divisores y múltiplos comunes de dos números.

1. Los números con los que se trabaja

Se trabaja con tres clases de números, y cada una sirve para una cosa distinta. Conviene tenerlas separadas, porque los errores de lectura nacen casi siempre de confundirlas.

1.1. Naturales y enteros

Los **números naturales** son los de contar: 0, 1, 2, 3… Sirven para lo que viene en piezas enteras: ciento veinte garrafas, cuatro pizzas, ciento cincuenta personas. Si una cuenta de estas da un decimal, hay que pararse: «se pueden llenar 120,4 garrafas» no es una respuesta.

Un termómetro marca cuatro grados bajo cero y una cuenta corriente se queda en números rojos. Para eso están los **números enteros**: los naturales, sus opuestos negativos y el cero.

SUMAR Y RESTAR CON NEGATIVOS

Restar un número negativo es sumarlo, porque quitar una deuda es ganar dinero: de −4 °C a 11 °C hay 11 − (−4) = 11 + 4 = 15 grados.

Y **sumar un negativo es restar**: tener 120 € y que lleguen tres recibos es 120 − 85 − 60 − 12,50 = −37,50 €, es decir, un descubierto de 37,50 €.

Con calculadora, lo más seguro es escribir el signo menos de un número con la tecla de cambio de signo, **+/−**, que se pulsa después de escribir el número, y no con la de restar.

1.2. Los decimales y el valor posicional

Casi todo lo que se mide y todo lo que se paga lleva decimales: 2,80 € el litro, 7,3 gramos por centímetro cúbico, 63,4 kilos de media. La coma separa las unidades enteras de las partes de unidad, y **cada cifra vale según el lugar que ocupa**. Ahí es donde más se falla, y no por falta de capacidad: en 424,8 el 4 de la izquierda vale cuatrocientos y el 4 que precede a la coma vale cuatro.

Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

Qué vale cada cifra del número 424,8 y del número 0,4248.

Lugar	centenas	decenas	unidades	décimas	centésimas	milésimas	diezmilésimas
Cada unidad de ese lugar vale	100	10	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
424,8	4	2	4	8			
0,4248			0	4	2	4	8

Leído en voz alta, 0,4248 es «cero coma cuatro mil doscientos cuarenta y ocho», es decir, cuatro mil doscientas cuarenta y ocho diezmilésimas. Lo que no vale es leer la parte decimal cifra a cifra y perderle el tamaño al número.

1.3. Comparar decimales

Muchas veces no hace falta calcular, sino decidir: ¿llega el dinero para pagar?, ¿cabe el mueble en el hueco? Decidir es comparar, y comparar decimales tiene truco.

CÓMO SE COMPARAN DOS DECIMALES

Primero la **parte entera**: el que la tenga mayor es mayor, y ahí se acaba —3,07 es mayor que 2,99 —. Si coinciden, se comparan las décimas; si también coinciden, las centésimas, y así sucesivamente.

Para no equivocarse, **se igualan los decimales con ceros**. Comparar 0,9 con 0,19 es comparar 0,90 con 0,19, y entonces se ve que la primera es mayor aunque tenga menos cifras. El error clásico es creer que gana el que tiene más cifras: 0,109 es menor que 0,9.

2. Las cuatro operaciones

Lo que cuesta no es hacer las cuatro operaciones, sino **elegir cuál de ellas pide el enunciado**; y esa elección vale tanto como el resultado: un buen planteamiento con una cuenta mal teclada se arregla; un planteamiento equivocado, no.

QUÉ OPERACIÓN PIDE CADA ENUNCIADO

- **Sumar**: «en total», «el gasto total», «la inversión inicial». Se juntan cantidades de la misma clase.
- **Restar**: «el resto», «cuánto queda», «cuánta superficie queda libre». Se quita una parte de un todo.
- **Multiplicar**: «por cada», «cada uno», «el doble». Se repite una misma cantidad muchas veces.
- **Dividir**: «repartir entre», «cuántos caben», «por unidad», «la media». Se parte un todo en partes iguales.

EJEMPLO 1

En una almazara se mezclan 1.800 l de aceite: 1/3 es de arbequina, 3/10 de picual y el resto de manzanilla. El aceite se envasa en garrafas de 15 l.

a) ¿Cuántos litros hay de cada clase?

b) ¿Cuántas garrafas se llenan?

Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

Los datos. Hay 1.800 l de mezcla: la arbequina es la tercera parte, el picual tres décimas partes y la manzanilla lo que queda. Cada garrafa lleva 15 l.

a) La arbequina. La tercera parte es la cantidad dividida entre tres:

$$1.800 : 3 = \textbf{600 l de arbequina}$$

El picual. Tres décimas partes son la décima parte tomada tres veces: primero se divide entre diez y después se multiplica por tres.

$$1.800 : 10 = 180 \text{ l} \cdot 180 \cdot 3 = \textbf{540 l de picual}$$

La manzanilla. «El resto» quiere decir lo que queda después de apartar lo demás, y eso es una resta:

$$1.800 - 600 - 540 = \textbf{660 l de manzanilla}$$

Comprobación: 600 + 540 + 660 = 1.800 l, que es toda la mezcla. Si no sumara 1.800, habría un error en alguno de los tres.

b) Repartir los 1.800 l en garrafas de 15 l es una división:

$$1.800 : 15 = \textbf{120 garrafas}$$

Comprobación: 15 · 120 = 1.800 l. La división es exacta y no sobra aceite.

Respuesta escrita. La mezcla lleva 600 l de arbequina, 540 l de picual y 660 l de manzanilla, y con ella se llenan 120 garrafas.

Las fracciones se tratan en el tema 2; aquí basta con leerlas como «la tercera parte» y «tres décimas partes».

2.1. Sumar y restar con coma

La única regla de la suma y la resta con decimales es **colocar las comas en la misma columna**. Las unidades debajo de las unidades y las décimas debajo de las décimas. Los huecos se rellenan con ceros, que no cambian el número.

EJEMPLO 2

Sumar 34,7 + 8,25 y restar 50 − 6,8.

34,7 tiene una cifra decimal y 8,25 tiene dos: se escribe 34,70 y quedan igualadas. En la resta, 50 es 50,0.

$$34{,}70 + 8{,}25 = \textbf{42,95} \cdot 50{,}0 - 6{,}8 = \textbf{43,2}$$

No alinear las comas, y sumar así décimas con centésimas, es el fallo más repetido de la aritmética con coma. Y con dinero hay regla de acabado: **una cantidad con céntimos se escribe con dos decimales**, de modo que 43,2 € se escribe 43,20 €.

2.2. Multiplicar y dividir por 10, por 100 y por 1.000

Esta es la operación más rentable del tema: aparece cada vez que hay que cambiar de unidad y no hace falta calculadora para hacerla.

Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

LA COMA SE MUEVE, LAS CIFRAS NO

Multiplicar por 10, 100 o 1.000 corre la coma uno, dos o tres lugares **a la derecha**, y el número se hace mayor. **Dividir** la corre los mismos lugares **a la izquierda**, y se hace menor.

Los ceros del divisor dicen cuántos lugares se mueve la coma, y si no hay cifras suficientes se añaden ceros: 56 : 100 = 0,56.

EJEMPLO 3

Tres cambios de unidad.

Los **424,8 g** de harina de una receta, en kilogramos: se divide entre 1.000, tres lugares a la izquierda.

$$424{,}8 : 1.000 = 0{,}4248 \text{ kg}$$

Una superficie de **3.640.000 cm²**, en metros cuadrados: un metro cuadrado son 10.000 cm², luego cuatro lugares a la izquierda.

$$3.640.000 : 10.000 = 364 \text{ m}^2$$

Y al revés, **0,07 kg** en gramos: se multiplica por 1.000, tres lugares a la derecha, y salen 70 g. En las tres no se ha hecho ninguna cuenta: solo se ha movido la coma.



Figura 1.1. Los 424,8 gramos de harina de una receta pasados a kilogramos. Dividir entre mil no cambia ninguna cifra: solo corre la coma tres lugares a la izquierda.

3. La jerarquía: qué se hace antes

Cuando en una misma cuenta hay sumas y multiplicaciones, el orden no es libre: si se opera de izquierda a derecha como quien lee sale un número, y si se respeta la jerarquía sale otro. Solo uno de los dos es el bueno.

$$2 + 3 \cdot 4 = 14 \quad \text{y no} \quad 2 + 3 \cdot 4 = 20$$

La razón es que multiplicar es una manera abreviada de sumar: 3 · 4 son tres cuatros, y esos tres cuatros forman un bloque que hay que resolver antes de juntarlo con el 2. No es una convención del todo arbitraria.

Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

EL ORDEN DE LAS OPERACIONES

1. **Los paréntesis**, de dentro hacia fuera.
2. **Las multiplicaciones y las divisiones**, de izquierda a derecha, según aparezcan.
3. **Las sumas y las restas**, también de izquierda a derecha.

Entre operaciones del mismo escalón no hay preferencia: se toman en el orden en que están escritas. En 100 : 2 · 5 se divide primero y después se multiplica, y da 250; multiplicar primero daría 10, que es otra cosa.

El paréntesis existe justamente para romper ese orden cuando hace falta. Escribir (2 + 3) · 4 obliga a sumar primero, y entonces sí da 20. Es la manera de decir por escrito «esto va junto».

(18 + 12) : 2 · 7	primero, el paréntesis
↓ 30 : 2 · 7	después, de izquierda a derecha: la división
↓ 15 · 7	y por último la multiplicación
↓ **105**	el resultado

Sin el paréntesis: 18 + 12 : 2 · 7 = 18 + 42 = 60.
El paréntesis no es un adorno: cambia el resultado.

Figura 1.2. La cuenta del ejemplo 4, paso a paso. Cada línea resuelve una sola operación, la que toca, y arrastra lo demás tal cual.

EJEMPLO 4

Un huerto tiene forma de trapecio, con bases de 18 m y de 12 m y una altura de 7 m. Se quiere cubrirlo con una capa de tierra de 0,3 m de grosor. Calcula la superficie del huerto y el volumen de tierra necesario.

Los datos. La superficie de un trapecio se calcula sumando las dos bases, dividiendo entre dos y multiplicando por la altura; la fórmula es materia del tema 8, y lo que aquí importa es el orden de esas tres operaciones.

La superficie. La suma de las bases va entre paréntesis, porque hay que sumarlas *antes* de dividir:

$$(18 + 12) : 2 \cdot 7 = 30 : 2 \cdot 7 = 15 \cdot 7 = \mathbf{105\ m^2}$$

El volumen. La capa de tierra tiene 0,3 m de grosor, de modo que su volumen es la superficie multiplicada por el grosor:

$$105 \cdot 0{,}3 = \mathbf{31{,}5\ m^3}$$

Comprobación: 105 m² es menos que los 126 m² del rectángulo de 18 por 7 y más que los 84 m² del de 12 por 7, que son las dos figuras entre las que está el trapecio. El resultado tenía que quedar ahí en medio, y así es.

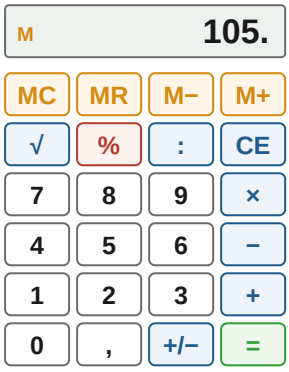
Respuesta escrita. El huerto mide 105 m² y hacen falta 31,5 m³ de tierra.

Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

4. La calculadora básica

Conviene usar siempre la misma, y que sea sencilla. No decide qué hay que calcular ni escribe la respuesta: quita de en medio las cuentas largas y deja tiempo para pensar el planteamiento.

4.1. Las teclas que hay que conocer



M+ suma a la memoria lo que hay en pantalla; MR la devuelve y MC la borra. Con ellas se guarda un resultado parcial sin apuntarlo.
CE borra solo el último número tecleado; C o AC, según el modelo, borra toda la cuenta.
% no hace lo mismo en todos los modelos: más vale no usarla y multiplicar a mano.
+/− cambia el signo del número en pantalla: es la tecla con la que se escriben los negativos.
= cierra la cuenta y da el resultado.

Figura 1.3. El teclado de una calculadora básica, con las teclas que se usan poco y resuelven muchas cuentas: la memoria, el borrado parcial y el cambio de signo.

4.2. El control de los diez segundos

Hay dos clases de calculadora básica, y es imprescindible saber cuál se tiene **antes** de fiarse de ella.

CÓMO SE AVERIGUA: TECLEAR 2 + 3 × 4 =

1. **Si en la pantalla sale 14**, la calculadora respeta la jerarquía: guarda el 2, resuelve 3 × 4 y después suma. Se le puede teclear la cuenta entera de un tirón.
2. **Si sale 20**, la calculadora opera según se teclea: ha sumado 2 + 3 y luego ha multiplicado por 4. No está estropeada, funciona así. Con ella hay que hacer primero los productos y las divisiones, y sumar al final.
3. **Si tiene teclas de paréntesis**, se pueden usar, y entonces la cuenta se teclea tal como está escrita.

Conviene hacerlo con la calculadora que se va a usar, no con otra. Son diez segundos, y evitan fiarse de un resultado calculado en otro orden.

4.3. Encadenar una cuenta larga: la memoria

Las teclas **M+**, **MR** y **MC** son un cajón donde dejar un resultado parcial mientras se calcula el siguiente: M+ suma a ese cajón lo que haya en pantalla, MR lo saca y MC lo vacía. Si al empezar una cuenta nueva la pantalla enseña una **M** en una esquina, hay que pulsar MC: si no, se arrastra lo anterior.

EJEMPLO 5

En una empresa se han anotado las horas que trabajó la semana pasada cada uno de sus 50 empleados:

Horas	37	38	39	40	41	42	43	44
Empleados	3	6	9	12	10	6	3	1

Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

Calcula el número medio de horas trabajadas.

Qué es la media. La suma de todos los valores, repartida entre el número de datos. Aquí cada valor se repite varias veces, y es la cuenta más larga del tema.

La suma. Cada número de horas se multiplica por los empleados que lo trabajaron, y se suman los ocho productos:

$$37 \cdot 3 + 38 \cdot 6 + 39 \cdot 9 + 40 \cdot 12 + 41 \cdot 10 + 42 \cdot 6 + 43 \cdot 3 + 44 \cdot 1$$

$$= 111 + 228 + 351 + 480 + 410 + 252 + 129 + 44 = \mathbf{2.005}$$

Con la memoria, sin apuntar nada. Se pulsa MC para vaciar el cajón y después, ocho veces seguidas: 37 × 3 = M+, 38 × 6 = M+, y así hasta 44 × 1 = M+. Al terminar se pulsa MR y en la pantalla aparecen los 2.005 sin haber escrito un solo número intermedio.

La media. La suma entre el número de empleados:

$$2.005 : 50 = \mathbf{40,1}$$

Comprobación: las frecuencias suman 3 + 6 + 9 + 12 + 10 + 6 + 3 + 1 = 50 empleados, que son los que dice el enunciado. Y la media sale entre 37 y 44, cerca de 40, que es donde se acumulan los datos. Si hubiera salido 401 o 4,01, la coma estaría mal puesta.

Respuesta escrita. Los empleados trabajaron de media 40,1 horas la semana pasada.

4.4. La tecla de porcentaje, y por qué es mejor no tocarla

La tecla **%** no hace lo mismo en todos los modelos: en unos, 50 × 21 % da 10,5; en otros hace falta pulsar además el igual; y al encadenarla con una suma, unos devuelven el precio con el impuesto y otros, otra cosa. La salida es sencilla y siempre funciona: **no usar esa tecla** y multiplicar. Un 21 % es multiplicar por 0,21, y añadir ese 21 % es multiplicar por 1,21, que son multiplicaciones corrientes. Cómo se arma ese multiplicador se explica en el tema 3, con los porcentajes y el IVA.

4.5. Comprobar lo que dice la pantalla

TRES COMPROBACIONES QUE NO CUESTAN NADA

- **La cuenta al revés.** Si una división ha dado 80, se multiplica 80 por el divisor y tiene que salir el dividendo.
- **El orden de magnitud, antes de teclear.** 4,8 · 19,7 es casi 5 por 20, o sea, unos 100. Si la pantalla dice 9,456, la coma se ha corrido un lugar.
- **El sentido del resultado.** Una rebaja deja un precio menor y un impuesto lo deja mayor. Un número que va al revés está mal aunque la cuenta esté «bien».

5. Cuántos decimales se escriben

Muchos enunciados fijan cuántos decimales hay que usar en los cálculos y en los resultados, casi siempre dos, y a veces fijan también el valor de π, 3,14. Cuando no lo dicen, dos decimales es también lo habitual.

Redondear a dos decimales es quedarse con las décimas y las centésimas y decidir qué pasa con el resto. La regla es una sola: **se mira la primera cifra que se tira**. Si es 0, 1, 2, 3 o 4, lo que queda se deja como está; si es 5, 6, 7, 8 o 9, la última cifra conservada sube una unidad.

Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice