Centro de Estudios ILLICE

ACCESO MAYORES DE 25 · COMUNITAT VALENCIANA

MATEMÁTICAS

Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

Matemáticas · Acceso a la universidad para mayores de 25 años (Comunitat Valenciana)

Primera edición: 2026

© 2026 Juan Marcos Sanmartín. Todos los derechos reservados.

Edita: Juan Marcos Sanmartín (Centro de Estudios Illice) · Pont dels Ortissos, 6, entresuelo · 03203 Elche (Alicante)
contacto@centrodeestudiosillice.com · www.centrodeestudiosillice.com

Este libro es para uso personal de quien lo ha comprado. Queda prohibida su reproducción, distribución, comunicación pública o transformación, total o parcial, por cualquier medio (incluidos WhatsApp, redes sociales y plataformas de apuntes), sin autorización escrita del titular, conforme a la Ley de Propiedad Intelectual.

Si has recibido este libro sin haberlo comprado, puedes conseguir tu propia copia en
www.centrodeestudiosillice.com/libros

ÍNDICE

BLOQUE I. NÚMEROS Y ÁLGEBRA

Tema 1 Los números reales: operaciones, potencias y radicales 5
Tema 2 Polinomios y ecuaciones 23
Tema 3 Sistemas de ecuaciones lineales 45
Tema 4 Matrices y determinantes 63
Tema 5 Exponenciales y logaritmos 81

BLOQUE II. GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

Tema 6 Geometría analítica del plano: puntos y rectas 97
Tema 7 Trigonometría y resolución de triángulos rectángulos 117

BLOQUE III. FUNCIONES, LÍMITES Y DERIVADAS

Tema 8 Funciones y sus gráficas 133
Tema 9 Límites 155
Tema 10 Continuidad y derivadas 171

BLOQUE IV. APLICACIONES DE LA DERIVADA Y CÁLCULO INTEGRAL

Tema 11 Aplicaciones de la derivada: crecimiento, extremos y optimización 191
Tema 12 Primitivas e integrales: el cálculo de áreas 211

BLOQUE V. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Tema 13 Estadística: media, rango y desviación típica 225
Tema 14 Combinatoria y probabilidad 241

ANEXOS

Anexo A Formulario 261
Anexo B Ejercicios resueltos 271
Anexo C La prueba y las cinco últimas convocatorias, resueltas 303

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

Centro de Estudios ILLICE

ACCESO MAYORES DE 25 · COMUNITAT VALENCIANA

MATEMÁTICAS

PRIMITIVAS E INTEGRALES: EL CÁLCULO DE ÁREAS

12

Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

Derivar es pasar de una función a la pendiente de su gráfica en cada punto. Este tema recorre el camino contrario: dada una función, buscar otra cuya derivada sea ella. Esa operación se llama **integrar**, y el resultado, **primitiva**.

Integrar sirve para mucho más que deshacer derivadas. Con una primitiva se calcula el área de una región del plano limitada por curvas, algo que la geometría elemental solo sabe hacer con rectángulos, triángulos y círculos. Aquí se trabaja sobre todo con polinomios, que se integran con una sola regla, y se aprende a plantear y calcular áreas sin el error que más se repite: dar por buena una integral negativa como si fuera un área.

1. La primitiva de una función

1.1. Derivar al revés

Si al derivar x^2 se obtiene $2x$, se dice que x^2 es una primitiva de $2x$.

> **PRIMITIVA**
>
> Una función F es una **primitiva** de f si su derivada es f:
>
> $$F'(x) = f(x).$$

Una función tiene muchas primitivas. x^2, $x^2 + 2$ y $x^2 - 7$ tienen todas la misma derivada, $2x$, porque la derivada de un número es cero. Y no hay más que esas: dos primitivas de una misma función se diferencian siempre en una constante. Por eso, si F es una primitiva de f, todas las primitivas de f son de la forma

$$F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Gráficamente, las primitivas de una función son la misma curva desplazada hacia arriba o hacia abajo: en cada abscisa tienen la misma pendiente, que es la que marca f.

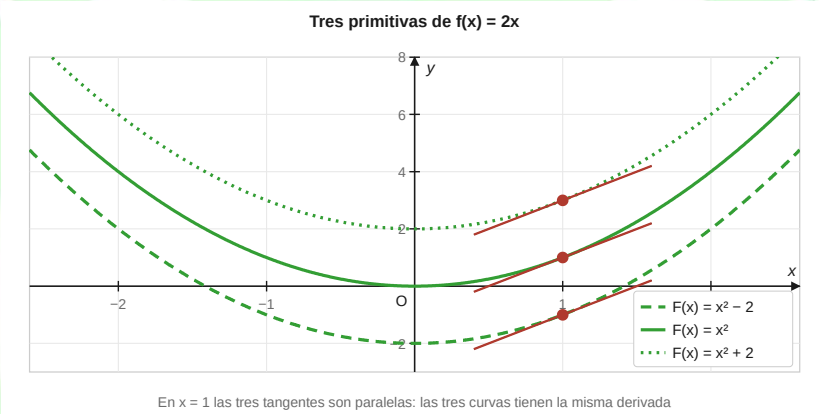


Figura 12.1. Tres primitivas de $f(x) = 2x$. Se obtienen unas de otras por un desplazamiento vertical, y en cada abscisa sus tangentes son paralelas.

1.2. La integral indefinida

El conjunto de todas las primitivas de f se llama **integral indefinida** de f y se escribe

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Se lee «integral de f de x, diferencial de x». El signo $\int$ es una S alargada (de «suma»), $f(x)$ es el **integrando**, dx indica que la variable es x y C es la **constante de integración**. Por ejemplo,

$$\int 4x^3\,dx = x^4 + C \quad \text{porque} \quad \left(x^4 + C\right)' = 4x^3.$$

Esa última comprobación vale siempre: **una primitiva se comprueba derivándola**. Si la derivada da el integrando, la primitiva está bien.

De las reglas de derivación salen dos propiedades que permiten integrar término a término:

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

Suma y resta. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

Producto por un número. $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$, para cualquier número k.

No hay una regla así para el producto ni para el cociente: **la integral de un producto no es el producto de las integrales**.

1.3. Las primitivas de los polinomios

Basta saber integrar una potencia de x. Como la derivada de x^{n+1} es $(n+1)\,x^n$, para que la derivada dé exactamente x^n hay que dividir entre $n+1$:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1).$$

En palabras: **se suma uno al exponente y se divide entre el exponente nuevo**. Con $n = 0$ sale la integral de una constante: $\int k\,dx = kx + C$.

Primitivas de las potencias más usadas

Integrando	k	x	x^2	x^3	x^4	x^n
Primitiva	kx	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^4}{4}$	$\frac{x^5}{5}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$

Con las dos propiedades anteriores, un polinomio se integra **término a término**: cada coeficiente se queda delante y cada potencia se integra con la regla.

EJEMPLO RESUELTO · UN POLINOMIO, TÉRMINO A TÉRMINO

Calcule $\int \left(6x^2 - 4x + 5\right)\,dx$.

Se separa en tres integrales y se saca cada coeficiente fuera:

$$\int \left(6x^2 - 4x + 5\right)\,dx = 6\int x^2\,dx - 4\int x\,dx + \int 5\,dx = 6\cdot\frac{x^3}{3} - 4\cdot\frac{x^2}{2} + 5x + C.$$

Simplificando, $\int \left(6x^2 - 4x + 5\right)\,dx = 2x^3 - 2x^2 + 5x + C$. Una sola constante al final basta: la suma de las constantes de cada término es otra constante.

Comprobación. $\left(2x^3 - 2x^2 + 5x + C\right)' = 6x^2 - 4x + 5$, que es el integrando.

Cuando el polinomio viene escrito como un producto de factores, o como una potencia de un binomio, **primero se desarrolla** y después se integra. No se puede integrar factor a factor.

EJEMPLO RESUELTO · UN PRODUCTO QUE HAY QUE DESARROLLAR

Calcule $\int (2x-1)(x+3)\,dx$.

El integrando es un producto, y no hay regla para integrar productos. Se multiplica:

$$(2x-1)(x+3) = 2x^2 + 6x - x - 3 = 2x^2 + 5x - 3.$$

Ahora es un polinomio y se integra término a término:

$$\int \left(2x^2 + 5x - 3\right)\,dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 3x + C.$$

Comprobación. Al derivar sale $2x^2 + 5x - 3$, que es el producto desarrollado. Si se hubiera integrado cada factor por separado, $\left(x^2 - x\right)\left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)$, la derivada no daría el integrando.

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

1.4. Otras primitivas inmediatas

La regla de la potencia vale también para exponentes negativos y fraccionarios, siempre que el exponente no sea -1. Antes de aplicarla hay que escribir la función como potencia: $\dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$, $\sqrt{x} = x^{1/2}$, $\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$. El caso $n = -1$, es decir, $\dfrac{1}{x}$, tiene primitiva propia: el logaritmo neperiano. Leyendo al revés la tabla de derivadas (tema 10) se obtienen las demás integrales inmediatas.

Integrales inmediatas

Tipo	Integral	Porque se deriva
Constante	$\int k\,dx = kx + C$	$(kx)' = k$
Potencia ($n \neq -1$)	$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$
Logarítmica	$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
Exponencial de base e	$\int e^x\,dx = e^x + C$	$(e^x)' = e^x$
Exponencial de base a	$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$(a^x)' = a^x \ln a$
Seno	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$	$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$
Coseno	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	$(-\cos x)' = \operatorname{sen} x$

El valor absoluto de $\ln\lvert x\rvert$ permite usar la primitiva también con x negativo; si se trabaja solo con $x > 0$, basta escribir $\ln x$.

EJEMPLO RESUELTO · POTENCIAS NEGATIVAS Y RAÍCES

Calcule $\displaystyle\int \left(\frac{3}{x^2} + \sqrt{x}\right) dx.$

Se escriben los dos términos como potencias: $\dfrac{3}{x^2} = 3x^{-2}$ y $\sqrt{x} = x^{1/2}$. Se aplica la regla de la potencia a cada uno:

$$\int 3x^{-2}\,dx = 3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{3}{x}, \qquad \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}x^{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}.$$

Por tanto, $\displaystyle\int \left(\frac{3}{x^2} + \sqrt{x}\right) dx = -\frac{3}{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$

Comprobación. $\left(-3x^{-1}\right)' = 3x^{-2} = \dfrac{3}{x^2}$ y $\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = \sqrt{x}$.

ERRORES FRECUENTES

Olvidar la constante. $\int f(x)\,dx$ es una familia de funciones; sin el $+C$ el resultado está incompleto.

Integrar factor a factor. $\int x(x+1)\,dx$ no es $\dfrac{x^2}{2} \cdot \left(\dfrac{x^2}{2} + x\right)$. Se desarrolla primero: $\int \left(x^2 + x\right) dx = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + C$.

Confundir integrar con derivar. La primitiva de x^3 es $\dfrac{x^4}{4}$, no $3x^2$ (eso es la derivada). Y la primitiva de $\ln x$ no es $\dfrac{1}{x}$: $\dfrac{1}{x}$ es su derivada.

Aplicar la regla de la potencia a $\dfrac{1}{x}$. Daría $\dfrac{x^0}{0}$, que no tiene sentido. Su primitiva es $\ln\lvert x\rvert$.

Dejar el exponente fraccionario mal sumado. $\dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$, y dividir entre $\dfrac{3}{2}$ es multiplicar por $\dfrac{2}{3}$.

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

1.5. La primitiva que pasa por un punto

Entre todas las primitivas de una función hay una sola cuya gráfica pasa por un punto dado. Para encontrarla se calcula la integral indefinida y se determina C sustituyendo el punto.

EJEMPLO RESUELTO · DETERMINAR LA CONSTANTE

Halle la función F cuya derivada es $F'(x) = 3x^2 - 2$ y que cumple $F(1) = 4$.

Primero, todas las primitivas de $3x^2 - 2$:

$$F(x) = \int \left(3x^2 - 2\right) dx = x^3 - 2x + C.$$

Después se impone la condición $F(1) = 4$:

$$F(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 + C = -1 + C = 4 \implies C = 5.$$

La función buscada es $F(x) = x^3 - 2x + 5$. **Comprobación:** $F'(x) = 3x^2 - 2$ y $F(1) = 1 - 2 + 5 = 4$.

2. La integral definida

2.1. El área bajo una curva

Sea f una función continua y positiva en un intervalo $[a, b]$. La región limitada por su gráfica, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ no es un polígono, así que su área no sale con las fórmulas de la geometría. Se puede aproximar, eso sí, con rectángulos: cuantos más y más estrechos, más se acerca la suma de sus áreas al área verdadera.

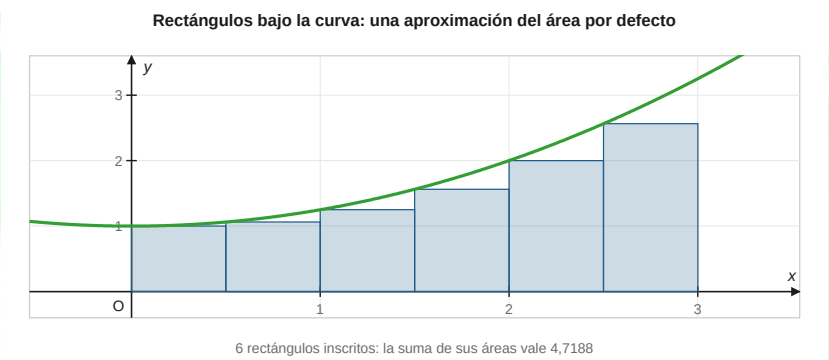


Figura 12.2. Seis rectángulos bajo la curva $y = \frac{x^2}{4} + 1$ entre 0 y 3. Su suma se queda algo corta; con más rectángulos el hueco se reduce.

El número al que se acercan esas sumas se llama **integral definida** de f entre a y b, y se escribe

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Los números a y b son los **límites de integración** (inferior y superior). A diferencia de la integral indefinida, que es una familia de funciones, **la integral definida es un número**.

2.2. La regla de Barrow

Calcular ese número sumando rectángulos sería larguísimo. El resultado central del cálculo integral dice que no hace falta: basta una primitiva.

REGLA DE BARROW

Si f es continua en $[a, b]$ y F es una primitiva de f, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

La constante C no hace falta: si se usara $F(x) + C$, al restar $(F(b) + C) - (F(a) + C)$ la C desaparece. Por eso en la integral definida se toma la primitiva sin constante.

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

CÓMO SE RESUELVE: UNA INTEGRAL DEFINIDA

1. **Halle una primitiva** F del integrando (sin la constante). Si el integrando es un producto, desarróllelo antes.
2. **Escriba la regla de Barrow** con corchetes: $\Big[F(x)\Big]_a^b$.
3. **Sustituya** primero el límite superior y luego el inferior, cada uno entre paréntesis, y **reste** en ese orden: $F(b) - F(a)$.
4. **Opere con cuidado** los signos: el error típico está en el segundo paréntesis, que va restando entero.

EJEMPLO RESUELTO · LA REGLA DE BARROW

Calcule $\displaystyle\int_0^2 \left(3x^2 - 2x + 1\right) dx$.

Una primitiva de $3x^2 - 2x + 1$ es $F(x) = x^3 - x^2 + x$, como se comprueba derivando. Por la regla de Barrow,

$$\int_0^2 \left(3x^2 - 2x + 1\right) dx = \Big[x^3 - x^2 + x\Big]_0^2 = (8 - 4 + 2) - (0 - 0 + 0) = 6.$$

La función $3x^2 - 2x + 1$ es positiva en todo el intervalo (su discriminante es negativo y el coeficiente principal, positivo), así que el 6 es el área de la región de la figura 12.3.



Figura 12.3. La integral definida de una función positiva es el área que queda entre la curva y el eje: aquí, 6 unidades cuadradas.

2.3. Propiedades de la integral definida

Todas salen de la regla de Barrow y sirven para ahorrar cuentas o comprobarlas.

PROPIEDADES

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$: sobre un intervalo de anchura cero no hay área.
2. $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$: al intercambiar los límites, la integral cambia de signo.
3. Si $a < c < b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$: el intervalo se puede partir.
4. $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$ y $\displaystyle\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$.
5. Si $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, la integral es positiva o cero; si $f(x) \leq 0$ en $[a, b]$, es negativa o cero.

La propiedad 5 es la que importa para las áreas: **donde la curva va por debajo del eje, la integral sale negativa**. Lo aprovecha el apartado siguiente.

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

3. El cálculo de áreas

3.1. Un recinto por encima del eje

Si $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, el área del recinto limitado por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$ es directamente la integral:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{si } f(x) \geq 0 \text{ en } [a, b].$$

3.2. Un recinto por debajo del eje

Si $f(x) \leq 0$ en $[a, b]$, la integral sale negativa, pero un área nunca lo es. El área es el **valor absoluto** de la integral:

$$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \qquad \text{si } f(x) \leq 0 \text{ en } [a, b].$$

EJEMPLO RESUELTO · UN RECINTO BAJO EL EJE

Calcule el área del recinto limitado por la curva $y = x^2 - 4x + 3$, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 3$.

Signo de la función. $x^2 - 4x + 3 = 0$ tiene por soluciones $x = 1$ y $x = 3$, que son justo los límites. Entre ellos, por ejemplo en $x = 2$, la función vale $4 - 8 + 3 = -1 < 0$: la curva va por debajo del eje en todo el intervalo (figura 12.4).

Integral. Con la primitiva $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$,

$$\int_1^3 \left(x^2 - 4x + 3\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_1^3 = (9 - 18 + 9) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 3\right) = 0 - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Área. La integral es negativa, como se esperaba, y el área es su valor absoluto:

$$A = \left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3} \approx 1{,}33 \text{ u}^2.$$

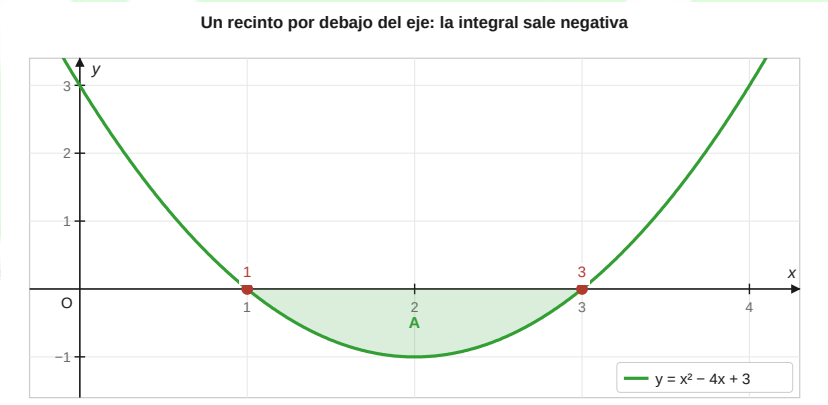


Figura 12.4. Entre $x = 1$ y $x = 3$ la parábola $y = x^2 - 4x + 3$ va por debajo del eje. La integral vale $-\frac{4}{3}$ y el área, $\frac{4}{3}$.

3.3. Cuando la función cambia de signo

Si la curva cruza el eje dentro del intervalo, una parte del recinto queda por encima y otra por debajo. Integrar de una vez entre a y b da un número en el que las partes de abajo **restan** de las de arriba, y eso ya no es el área. Hay que **partir el intervalo** por los cortes con el eje, integrar en cada trozo y sumar los valores absolutos:

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

$$A = \left|\int_a^{c_1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx\right| + \cdots + \left|\int_{c_k}^{b} f(x)\,dx\right|,$$

donde $c_1 < c_2 < \cdots < c_k$ son los puntos de (a, b) en los que f se anula.

CÓMO SE RESUELVE: EL ÁREA ENTRE UNA CURVA Y EL EJE DE ABSCISAS

1. **Halle los cortes con el eje** resolviendo $f(x) = 0$. Quédese con los que están **dentro** del intervalo. Si el enunciado no da rectas verticales, son los propios cortes los que cierran el recinto.
2. **Haga un esquema** con los cortes y el signo de f en cada trozo (sustituyendo un valor cómodo de cada uno). Diga por escrito qué trozos quedan por encima y cuáles por debajo.
3. **Calcule una integral por trozo** con la regla de Barrow. La primitiva es la misma para todos: se calcula una vez.
4. **Sume los valores absolutos** y escriba el resultado con sus unidades cuadradas. Compruebe que es positivo y que el orden de magnitud cuadra con el esquema.

EJEMPLO RESUELTO · TRES RECINTOS

Halle el área encerrada entre la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x - 3$, el eje de abscisas y las rectas $x = -3$ y $x = 4$.

Cortes con el eje. Con la fórmula de la ecuación de segundo grado,

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \implies x = 3, \quad x = -1.$$

Los dos están dentro de $[-3, 4]$, así que hay **tres trozos**: $[-3, -1]$, $[-1, 3]$ y $[3, 4]$.

Signo en cada trozo. $f(-2) = 4 + 4 - 3 = 5 > 0$; $f(0) = -3 < 0$; $f(\tfrac{7}{2}) = \tfrac{49}{4} - 7 - 3 = \tfrac{9}{4} > 0$. La curva va por encima, por debajo y por encima (figura 12.5).

Integrales. Una primitiva es $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x$. Sus valores en los extremos de los trozos son

$$F(-3) = -9 - 9 + 9 = -9, \quad F(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 = \frac{5}{3}, \quad F(3) = 9 - 9 - 9 = -9, \quad F(4) = \frac{64}{3} - 16 - 12 = -\frac{20}{3}.$$

Por la regla de Barrow:

$$\int_{-3}^{-1} f(x)\,dx = \frac{5}{3} - (-9) = \frac{32}{3}, \qquad \int_{-1}^{3} f(x)\,dx = -9 - \frac{5}{3} = -\frac{32}{3}, \qquad \int_{3}^{4} f(x)\,dx = -\frac{20}{3} - (-9) = \frac{7}{3}.$$

Los signos son los que anunciaba el esquema.

Área.

$$A = \frac{32}{3} + \left|-\frac{32}{3}\right| + \frac{7}{3} = \frac{71}{3} \approx 23{,}67\ \text{u}^2.$$

Comprobación. Integrando de una vez entre -3 y 4 saldría $\tfrac{32}{3} - \tfrac{32}{3} + \tfrac{7}{3} = \tfrac{7}{3}$: el recinto central, de área $\tfrac{32}{3}$, se habría comido el de la izquierda. Es justo el error que evita partir el intervalo.

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

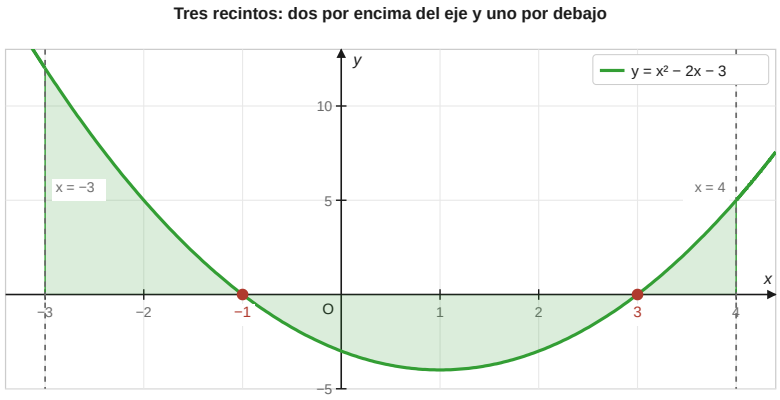


Figura 12.5. Entre $x=-3$ y $x=4$ la parábola $y=x^2-2x-3$ corta al eje en -1 y en 3: hay dos recintos por encima y uno por debajo, que se calculan por separado.

Cuando el enunciado no da rectas verticales («el recinto limitado por la curva y el eje de abscisas»), los límites son los cortes con el eje más extremos.

EJEMPLO RESUELTO · UNA CÚBICA Y EL EJE

Calcule el área del recinto limitado por la curva $y=x^3-x^2-2x$ y el eje de abscisas.

Cortes. Se saca factor común y se resuelve la de segundo grado:

$$x^3-x^2-2x=x\left(x^2-x-2\right)=x(x+1)(x-2)=0 \implies x=-1,\ x=0,\ x=2.$$

Hay dos recintos: uno entre -1 y 0 y otro entre 0 y 2 (figura 12.6). En $x=-\frac{1}{2}$ la función vale $-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+1=\frac{5}{8}>0$ y en $x=1$ vale $1-1-2=-2<0$.

Integrales. Con $F(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{3}-x^2$, que vale $F(-1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1=-\frac{5}{12}$, $F(0)=0$ y $F(2)=4-\frac{8}{3}-4=-\frac{8}{3}$:

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=0-\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{5}{12}, \qquad \int_{0}^{2} f(x)\,dx=-\frac{8}{3}-0=-\frac{8}{3}.$$

Área.

$$A=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{5}{12}+\frac{32}{12}=\frac{37}{12}\approx 3{,}08\ \mathrm{u}^2.$$

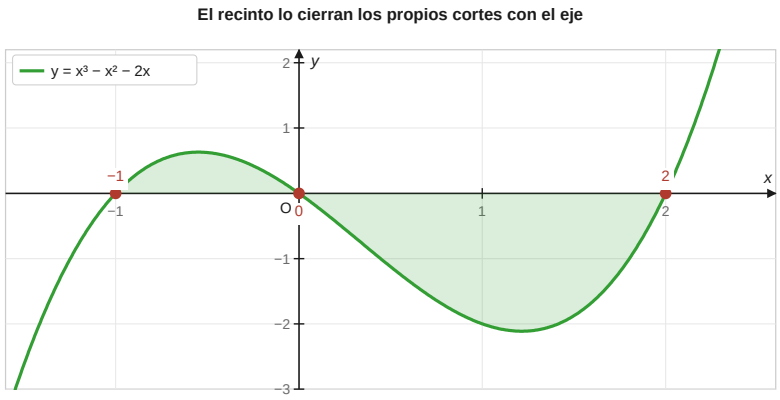


Figura 12.6. La cúbica $y=x^3-x^2-2x$ corta al eje en -1, 0 y 2 y encierra con él dos recintos de áreas $\frac{5}{12}$ y $\frac{8}{3}$.

3.4. El área entre dos curvas

Si en $[a,b]$ la gráfica de g queda por encima de la de f, el área entre las dos curvas es la integral de la diferencia, **la de arriba menos la de abajo**:

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice