Centro de Estudios ILLICE

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · Prueba de Acceso a la Universidad

Primera edición: 2026

© 2026 Juan Marcos Sanmartín. Todos los derechos reservados.

Edita: Juan Marcos Sanmartín (Centro de Estudios Illice) · Pont dels Ortissos, 6, entresuelo · 03203 Elche (Alicante)
contacto@centrodeestudiosillice.com · www.centrodeestudiosillice.com

Este libro es para uso personal de quien lo ha comprado. Queda prohibida su reproducción, distribución, comunicación pública o transformación, total o parcial, por cualquier medio (incluidos WhatsApp, redes sociales y plataformas de apuntes), sin autorización escrita del titular, conforme a la Ley de Propiedad Intelectual.

Si has recibido este libro sin haberlo comprado, puedes conseguir tu propia copia en
www.centrodeestudiosillice.com/libros

ÍNDICE

BLOQUE I. ÁLGEBRA Y PROGRAMACIÓN LINEAL

Tema 1 Matrices 5
Tema 2 Sistemas de ecuaciones lineales 33
Tema 3 Programación lineal 63

BLOQUE II. ANÁLISIS

Tema 4 Funciones, límites y continuidad 93
Tema 5 La derivada 123
Tema 6 Representación de funciones 149
Tema 7 Optimización y problemas de aplicación 179
Tema 8 La integral y el cálculo de áreas 207

BLOQUE III. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Tema 9 Probabilidad 237
Tema 10 Las distribuciones binomial y normal 269
Tema 11 Muestreo e intervalos de confianza 297
Anexo A Formulario y tablas 321
Anexo B Ejercicios resueltos 349
Anexo C Las diez últimas convocatorias de la PAU, resueltas 415

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

Centro de Estudios ILLICE

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENC

PROBABILIDAD

9

Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

Hay preguntas que no tienen respuesta segura y sí tienen respuesta razonada. Si de cada cien envíos de un almacén se retrasan cuatro, no se sabe qué pasará con el siguiente, pero sí se sabe cuánto conviene fiarse. Este tema enseña a poner número a esa confianza: a traducir un enunciado en sucesos, a ordenar la información en un árbol o en una tabla, y a darle la vuelta al razonamiento cuando lo que se conoce es el resultado y lo que se pregunta es la causa.

1. Experimentos aleatorios, sucesos y operaciones

1.1. Experimento aleatorio y espacio muestral

Un **experimento determinista** da siempre el mismo resultado cuando se repite en las mismas condiciones: soltar una piedra, calentar agua a cien grados al nivel del mar. Un **experimento aleatorio** no: se conocen todos los resultados posibles, pero no cuál de ellos saldrá. Elegir al azar un cliente de una compañía, sacar una pieza de una caja o preguntar a un ciudadano si ha participado en una actividad son experimentos aleatorios.

ESPACIO MUESTRAL Y SUCESOS

- El **espacio muestral** E es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento. Cada resultado individual es un **suceso elemental**.
- Un **suceso** es cualquier subconjunto de E: una colección de resultados. Se dice que el suceso **ocurre** cuando el resultado del experimento es uno de los suyos.
- E entero es el **suceso seguro**: ocurre siempre. El conjunto vacío $\varnothing$ es el **suceso imposible**: no ocurre nunca.

Los sucesos se nombran con letras mayúsculas y se describen con una frase entre comillas. Escribir A = *«el envío sale del almacén B»* es el primer paso de cualquier problema.

EJEMPLO RESUELTO 1

Una empresa de mensajería reparte desde tres almacenes, A, B y C, y cada envío llega con retraso o a tiempo. Se elige un envío al azar. Describir el espacio muestral y los sucesos «el envío sale de A» y «el envío llega con retraso».

El resultado de cada experimento son dos datos: de qué almacén sale y si llega tarde. Escribiendo R para «con retraso» y T para «a tiempo», el espacio muestral tiene seis resultados:

$$E = \{(A,R),\ (A,T),\ (B,R),\ (B,T),\ (C,R),\ (C,T)\}.$$

El suceso «el envío sale de A» no es un resultado, sino un conjunto de resultados: $\{(A,R),(A,T)\}$. Y «el envío llega con retraso» es $\{(A,R),(B,R),(C,R)\}$. Los dos son sucesos con dos y tres elementos, y ninguno de ellos es elemental.

Comprobación. Los seis sucesos elementales no se solapan y entre todos agotan E: cualquier envío cae en uno y en uno solo. Eso es lo que hay que pedirle a un espacio muestral bien escrito.

1.2. Operaciones con sucesos

Los sucesos son conjuntos, y se combinan como conjuntos. Las cuatro operaciones que hacen falta son estas, y conviene verlas dibujadas antes de usarlas.

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

LAS OPERACIONES

- **Unión,** $A \cup B$**:** ocurre cuando ocurre A, o ocurre B, o ocurren los dos. Se lee «A *o* B», con la «o» no exclusiva del castellano de las matemáticas.
- **Intersección,** $A \cap B$**:** ocurre cuando ocurren los dos a la vez. Se lee «A *y* B».
- **Complementario o contrario,** A^c**:** ocurre cuando no ocurre A. Siempre se cumple $A \cup A^c = E$ y $A \cap A^c = \varnothing$.
- **Diferencia,** $A - B$**:** ocurre A y no ocurre B. Es lo mismo que $A \cap B^c$, y así conviene escribirla.

Dos sucesos son **incompatibles** —o excluyentes— cuando $A \cap B = \varnothing$: no pueden ocurrir a la vez. «Salir de A» y «salir de B» son incompatibles; «salir de A» y «llegar con retraso» no lo son.

Las cuatro operaciones con sucesos

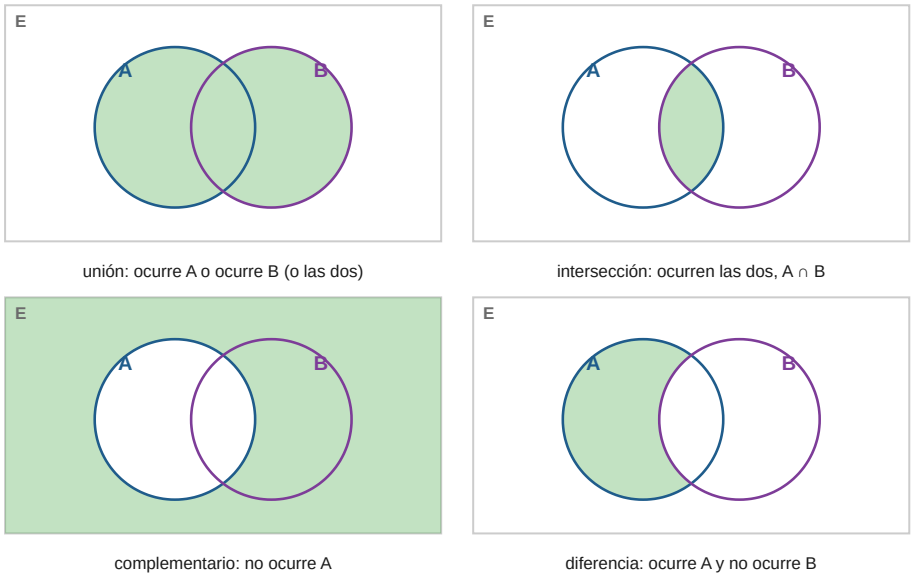


Figura 9.1. Las cuatro operaciones sobre el mismo par de sucesos. El rectángulo es el espacio muestral E, y cada círculo, un suceso; la zona sombreada es el suceso que se ha construido.

1.3. Las leyes de De Morgan

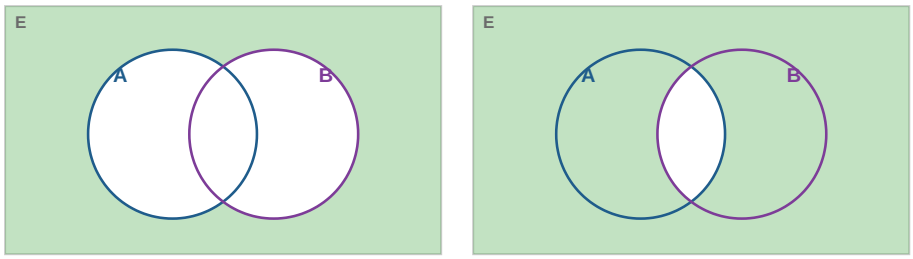
La dificultad real de un enunciado de probabilidad no es la cuenta: es traducir al lenguaje de los conjuntos frases como «ninguno de los dos», «al menos uno» o «exactamente uno». Las dos **leyes de De Morgan** son justamente la herramienta de esa traducción, y sin ellas muchos enunciados se quedan sin plantear.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

En palabras: **negar una unión es una intersección de negaciones** —no ocurre ninguno de los dos— y **negar una intersección es una unión de negaciones** —no ocurren los dos a la vez, es decir, falla alguno—. La segunda es la que más se equivoca: «no ocurren los dos» no significa «no ocurre ninguno», sino «como mucho ocurre uno».

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

Las dos leyes de De Morgan, vistas



ninguno de los dos = no A y no B | no los dos a la vez = no A o no B

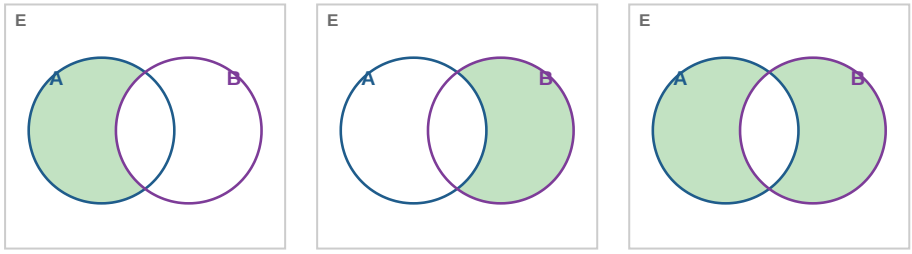
Figura 9.2. Las dos leyes de De Morgan. A la izquierda, lo que queda fuera de los dos círculos; a la derecha, todo menos el trozo común. Son zonas muy distintas, y por eso las dos leyes no se pueden confundir.

DICCIONARIO DEL ENUNCIADO

Sean A y B dos sucesos. Estas son las siete frases que aparecen en los enunciados, con su traducción y con la probabilidad correspondiente.

- «ocurren **los dos**», «ambos» $\rightarrow$ $A \cap B$.
- «ocurre **alguno**», «**al menos uno**» $\rightarrow$ $A \cup B$, y $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- «**ninguno** de los dos» $\rightarrow$ $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$, y su probabilidad es $1 - P(A \cup B)$.
- «**no los dos a la vez**», «no ambos» $\rightarrow$ $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$, y su probabilidad es $1 - P(A \cap B)$.
- «ocurre A **pero no** B» $\rightarrow$ $A \cap B^c$, y $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$.
- «**exactamente uno**», «solamente uno», «uno de los dos y solo uno» $\rightarrow$ $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$, y su probabilidad es $P(A \cup B) - P(A \cap B)$.
- «**a lo sumo uno**» $\rightarrow$ lo mismo que «no los dos a la vez»: $1 - P(A \cap B)$.

«Exactamente uno» es la unión de dos trozos que no se solapan



A y no B | B y no A | exactamente uno de los dos

Figura 9.3. «Exactamente uno de los dos» se arma con dos piezas que no se solapan: la parte de A que no toca a B y la parte de B que no toca a A. Por eso sus probabilidades se suman sin restar nada.

EJEMPLO RESUELTO 2

En una encuesta a los usuarios de una biblioteca municipal se llama L = «usa el servicio de préstamo de libros» y S = «usa la sala de estudio». Escribir con operaciones de sucesos: a) usa las dos cosas; b) no usa ninguna de las dos; c) usa el préstamo pero no la sala; d) usa exactamente uno de los dos servicios; e) no usa los dos servicios a la vez.

a) $L \cap S$.

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

b) Hay que negar «usa alguno», que es la unión: $(L \cup S)^c$, y por la primera ley de De Morgan eso es $L^c \cap S^c$. Las dos escrituras valen; la segunda es la que se lee directamente en la frase.

c) $L \cap S^c$, que también se escribe $L - S$.

d) Es «usa el préstamo y no la sala» *o* «usa la sala y no el préstamo», y esas dos posibilidades son incompatibles:

$$(L \cap S^c) \cup (L^c \cap S).$$

e) Ahora se niega la intersección, y la segunda ley de De Morgan da $(L \cap S)^c = L^c \cup S^c$. Obsérvese que este suceso **sí** ocurre cuando alguien usa solo el préstamo, mientras que el del apartado b) no: son sucesos distintos y no hay que confundirlos.

2. La probabilidad

2.1. De la frecuencia a la probabilidad

Si un experimento aleatorio se repite n veces y el suceso A ocurre n_A veces, la **frecuencia relativa** de A es el cociente $f_A = \dfrac{n_A}{n}$. Al aumentar el número de repeticiones esa frecuencia se estabiliza alrededor de un número, y ese número es lo que se llama la **probabilidad** de A. Es la idea que convierte una encuesta a dos mil personas en una probabilidad: si 640 de ellas usaron alguno de los dos servicios, se toma $P = \dfrac{640}{800} = 0.8$.

2.2. La regla de Laplace

Cuando todos los resultados del experimento son igual de probables —resultados **equiprobables**—, la probabilidad se cuenta.

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}$$

La regla se llama **regla de Laplace**, y hay que citarla por su nombre cuando se usa. La condición de equiprobabilidad no es un adorno: solo vale si los casos son intercambiables —un dado equilibrado, una elección al azar entre personas, una pieza sacada sin mirar—. Si el enunciado dice «un dado trucado», la regla de Laplace no se puede aplicar.

EJEMPLO RESUELTO 3

Un instituto tiene 480 alumnos, de los que 300 son de ESO. Cada alumno ha elegido una única actividad extraescolar: 240 eligieron fútbol, 150 baloncesto y 90 música. Se elige un alumno al azar. Hallar la probabilidad de que sea de ESO y la de que haya elegido una actividad deportiva.

La elección es al azar entre los 480 alumnos, de modo que todos los casos son equiprobables y se aplica la regla de Laplace. Para el primer suceso hay 300 casos favorables:

$$P(\text{ESO}) = \frac{300}{480} = \frac{5}{8} = 0.625.$$

«Actividad deportiva» reúne fútbol y baloncesto, que son incompatibles porque cada alumno elige una sola: $240 + 150 = 390$ casos favorables.

$$P(\text{deportiva}) = \frac{390}{480} = \frac{13}{16} = 0.8125.$$

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

Interpretación. De cada 16 alumnos del instituto, 13 hacen deporte por la tarde. Y como las tres actividades agotan las posibilidades, $P(\text{música}) = \frac{90}{480} = 0.1875$, que en efecto completa: $0.8125 + 0.1875 = 1$.

2.3. Los axiomas y las propiedades

La regla de Laplace no sirve para todo: no hay casos que contar cuando el enunciado da directamente porcentajes. Lo que vale siempre son los tres axiomas de Kolmogórov y las propiedades que se deducen de ellos.

AXIOMAS DE LA PROBABILIDAD

1. $P(A) \geq 0$ para todo suceso A.
2. $P(E) = 1$: el suceso seguro tiene probabilidad 1.
3. Si A y B son **incompatibles**, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

De ahí salen, en este orden, las propiedades que se usan a diario:

- **Complementario:** $P(A^c) = 1 - P(A)$. Es la propiedad que más ahorra: calcular «al menos uno» suele ser más largo que calcular «ninguno» y restar.
- **Suceso imposible:** $P(\varnothing) = 0$.
- **Unión de dos sucesos cualesquiera:** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Se resta la intersección porque al sumar $P(A)$ y $P(B)$ se ha contado dos veces.
- **Diferencia:** $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$.
- **Monotonía:** si $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$. Y en todo caso $0 \leq P(A) \leq 1$.

La fórmula de la unión tiene una consecuencia que conviene tener a mano: despejando, $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$. En los problemas donde el enunciado da tres probabilidades y pide la cuarta, casi siempre se trata de usar esta igualdad o la de De Morgan.

EL TRUCO DEL COMPLEMENTARIO

Hay tres frases que casi nunca conviene atacar de frente, porque tienen muchos casos favorables y su contraria tiene uno solo:

- «**al menos uno**» es lo contrario de «**ninguno**»;
- «**alguna vez**» es lo contrario de «**ninguna vez**»;
- «**como mucho uno**» es lo contrario de «**dos o más**».

Si una máquina produce un 5 % de piezas defectuosas y se eligen dos al azar de un lote grande, calcular «al menos una defectuosa» sumando casos obliga a tres cuentas; calcular su contraria es una sola: $1 - 0.95^2 = 1 - 0.9025 = 0.0975$. La regla es **buscar siempre la contraria antes de ponerse a sumar**, y decir en la solución que se ha usado la propiedad del complementario.

CÓMO SE RESUELVE: SUCESOS DADOS POR SUS PROBABILIDADES

Es el caso en que no hay árbol ni tabla, solo unos cuantos datos sueltos y unas preguntas.

1. **Nombrar los sucesos** con una letra y una frase entre comillas, y escribir al lado los datos tal como vienen.
2. **Traducir cada dato** al lenguaje de conjuntos. Si aparece algo negado —$P(A^c \cap B^c)$, por ejemplo—, se aplica De Morgan de inmediato: $P(A^c \cap B^c) = P\big((A \cup B)^c\big) = 1 - P(A \cup B)$.

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

3. **Rellenar las cuatro cantidades básicas:** $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cap B)$ y $P(A\cup B)$. Están ligadas por $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, así que conocidas tres sale la cuarta.
4. **Responder cada pregunta** traduciéndola con el diccionario del apartado 1.3 y sustituyendo.
5. **Comprobar** que todas las probabilidades obtenidas están entre 0 y 1, y que las piezas disjuntas suman lo que tienen que sumar: $P(A\cap B)+P(A\cap B^c)+P(A^c\cap B)+P(A^c\cap B^c)=1$.

EJEMPLO RESUELTO 4

De dos sucesos A y B de un mismo experimento se sabe que $P(B)=0.4$, que $P(A^c\cap B^c)=0.2$ y que $P(A\cap B)=0.3$. Se pide: a) $P(A\cup B)$; b) $P(A)$; c) la probabilidad de que se verifique solamente uno de los dos sucesos; d) $P(B/A)$.

a) El dato $P(A^c\cap B^c)$ es, por la primera ley de De Morgan, la probabilidad de que no ocurra ninguno:

$$P(A^c\cap B^c)=P\big((A\cup B)^c\big)=1-P(A\cup B)=0.2 \implies P(A\cup B)=0.8.$$

b) Ahora se despeja en la fórmula de la unión:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \implies 0.8=P(A)+0.4-0.3,$$

de donde $P(A)=0.8-0.4+0.3=0.7$.

c) «Solamente uno» es la unión menos la intersección:

$$P\big((A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\big)=P(A\cup B)-P(A\cap B)=0.8-0.3=0.5.$$

d) Con la definición de probabilidad condicionada, que se ve en el apartado siguiente:

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.3}{0.7}=\frac{3}{7}\approx 0.4286.$$

Comprobación. Las cuatro piezas disjuntas son $P(A\cap B)=0.3$, $P(A\cap B^c)=0.7-0.3=0.4$, $P(A^c\cap B)=0.4-0.3=0.1$ y $P(A^c\cap B^c)=0.2$. Suman $0.3+0.4+0.1+0.2=1$, como tenía que ser. Y el apartado c) se puede rehacer sumando las dos piezas de en medio: $0.4+0.1=0.5$, lo mismo.

3. Probabilidad condicionada

3.1. Qué significa condicionar

Saber algo cambia las probabilidades. La probabilidad de que un alumno del instituto del ejemplo 3 haya elegido música es 0.1875; pero si además se sabe que es de Bachillerato, la respuesta ya no es esa, porque solo cuentan los alumnos de Bachillerato. Condicionar es exactamente eso: **cambiar de espacio muestral**.

PROBABILIDAD CONDICIONADA

Si $P(B)>0$, la probabilidad de A condicionada a B es

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Se lee «probabilidad de A **sabiendo que** ha ocurrido B», o «de A condicionado a B». El suceso que se da por ocurrido es siempre el de **detrás** de la barra.

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

Sobre la notación: en la Comunitat Valenciana la condicionada se escribe con **barra inclinada**, $P(A/B)$, y así se escribe aquí. Otros libros y otras comunidades usan la barra vertical, $P(A|B)$; significa lo mismo. Lo que no se puede es confundir $P(A/B)$ con $P(A \cap B)$: la primera es un cociente y la segunda, un producto.

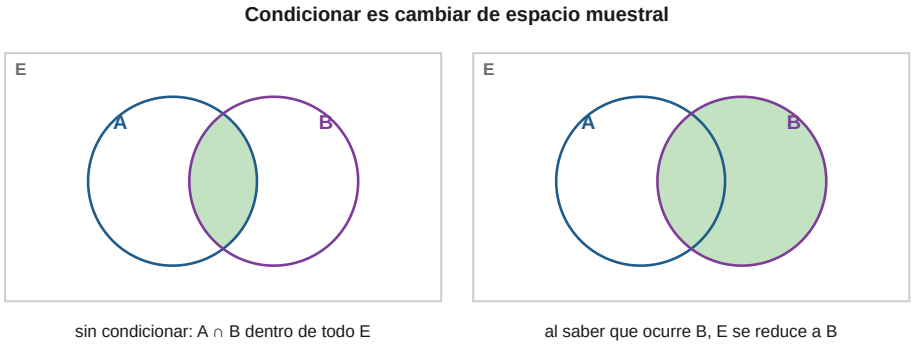


Figura 9.4. Al condicionar a B, el espacio muestral deja de ser el rectángulo entero y pasa a ser el círculo B. Los casos favorables siguen siendo los de $A \cap B$, pero ahora se comparan con B y no con E: por eso se divide entre $P(B)$.

3.2. La regla del producto

Despejando en la definición se obtiene la igualdad que hace funcionar los diagramas de árbol, y que por eso es la fórmula más usada del tema:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Las dos escrituras son válidas y se elige la que tenga los datos. En un experimento que ocurre en dos etapas —primero se elige el almacén, después se observa si hay retraso— la natural es la segunda: la probabilidad de la primera etapa por la de la segunda *dada* la primera.

EJEMPLO RESUELTO 5

El 70 % de los envíos de una empresa se entregan en menos de 24 horas. De los que se entregan en menos de 24 horas, el 90 % llega sin ninguna incidencia. Hallar la probabilidad de que un envío elegido al azar se entregue en menos de 24 horas y sin incidencias.

Se nombran los sucesos: R = «se entrega en menos de 24 horas» y N = «llega sin incidencias». Los datos son $P(R) = 0.7$ y, atención, $P(N/R) = 0.9$: el 90 % está calculado *dentro* de los envíos rápidos, luego es una probabilidad condicionada y no $P(N)$.

Por la regla del producto,

$$P(R \cap N) = P(R) \cdot P(N/R) = 0.7 \cdot 0.9 = 0.63.$$

Interpretación. Un 63 % de todos los envíos cumple las dos cosas. Nótese que 0.63 es menor que 0.7 y menor que 0.9: una intersección nunca puede ser más probable que cada uno de los sucesos que la forman, y eso sirve de comprobación rápida.

3.3. Sucesos independientes

A veces saber que ha ocurrido B no cambia nada. Entonces se dice que los sucesos son independientes.

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

INDEPENDENCIA

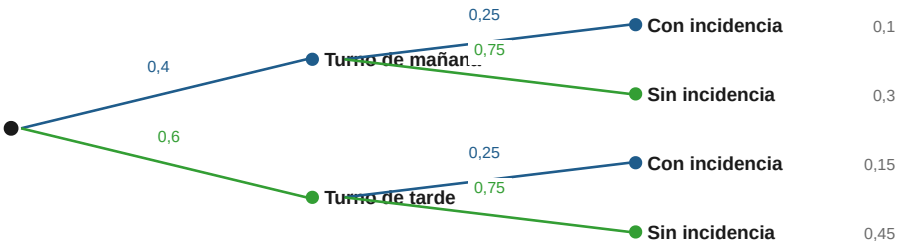
Dos sucesos A y B son **independientes** cuando

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Equivalentemente —si las probabilidades no son nulas—, cuando $P(A/B) = P(A)$, o cuando $P(B/A) = P(B)$: la información no sirve de nada. Si la igualdad falla, los sucesos son **dependientes**.

Así se contesta. La pregunta «¿son independientes?» se responde calculando por separado $P(A) \cdot P(B)$ y $P(A \cap B)$, escribiendo los dos números y comparándolos. No basta con decir que sí o que no: hay que enseñar las dos cifras.

Un árbol que delata la independencia



Las dos ramas de «Con incidencia» llevan el mismo 0,25: el turno no informa de nada

Figura 9.5. Un árbol delata la independencia a simple vista: si las ramas de «Con incidencia» llevan la misma probabilidad salgan de donde salgan, el turno no informa de nada. Aquí $P(\text{incidencia}) = 0.4 \cdot 0.25 + 0.6 \cdot 0.25 = 0.25$, que es justamente el valor que se repite en las dos ramas.

3.4. Independiente no es incompatible

Es el error clásico del tema, y conviene desmontarlo despacio porque las dos palabras suenan parecidas y significan cosas casi opuestas.

DOS IDEAS DISTINTAS

- **Incompatibles** es una afirmación sobre los *casos*: $A \cap B = \varnothing$, no hay ningún resultado que sirva para los dos. Se ve en el dibujo: los círculos no se tocan.
- **Independientes** es una afirmación sobre las *probabilidades*: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. No se ve en el dibujo; hay que calcular.

Y aquí está la trampa. Si A y B son incompatibles y ninguno de los dos es imposible, entonces

$$P(A \cap B) = 0 \quad \text{pero} \quad P(A) \cdot P(B) > 0,$$

de modo que **no son independientes**: son dependientes del todo. Saber que ha ocurrido A informa muchísimo sobre B, porque garantiza que B no ha ocurrido. Dicho al revés: dos sucesos incompatibles de probabilidad no nula nunca son independientes, y dos sucesos independientes de probabilidad no nula nunca son incompatibles.

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice