Centro de Estudios ILLICE

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

MATEMÁTICAS II

Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

Matemáticas II · Prueba de Acceso a la Universidad

Primera edición: 2026

© 2026 Juan Marcos Sanmartín. Todos los derechos reservados.

Edita: Juan Marcos Sanmartín (Centro de Estudios Illice) · Pont dels Ortissos, 6, entresuelo · 03203 Elche (Alicante)
contacto@centrodeestudiosillice.com · www.centrodeestudiosillice.com

Este libro es para uso personal de quien lo ha comprado. Queda prohibida su reproducción, distribución, comunicación pública o transformación, total o parcial, por cualquier medio (incluidos WhatsApp, redes sociales y plataformas de apuntes), sin autorización escrita del titular, conforme a la Ley de Propiedad Intelectual.

Si has recibido este libro sin haberlo comprado, puedes conseguir tu propia copia en
www.centrodeestudiosillice.com/libros

ÍNDICE

BLOQUE I. ÁLGEBRA LINEAL

Tema 1 Matrices 5
Tema 2 Determinantes y rango 33
Tema 3 Sistemas de ecuaciones lineales 61

BLOQUE II. GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Tema 4 Vectores en el espacio 93
Tema 5 Rectas y planos: ecuaciones y posiciones relativas 117
Tema 6 Problemas métricos: ángulos, distancias, áreas y volúmenes 149

BLOQUE III. ANÁLISIS

Tema 7 Límites y continuidad 179
Tema 8 La derivada y sus aplicaciones 211
Tema 9 Representación de funciones y optimización 241
Tema 10 La integral y el cálculo de áreas 271

BLOQUE IV. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Tema 11 Probabilidad 303
Tema 12 Las distribuciones binomial y normal 331

ANEXOS

Anexo A Formulario y tablas 357
Anexo B Ejercicios resueltos 385
Anexo C Las diez últimas convocatorias de la PAU, resueltas 453

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

Centro de Estudios ILLICE

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

MATEMÁTICAS II

PROBABILIDAD

11

Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

El azar no es lo contrario del cálculo. Hay experimentos cuyo resultado no se puede anticipar —qué pide el próximo cliente, si una pieza saldrá defectuosa, si un test acertará—, pero cuyos resultados, repetidos muchas veces, se reparten con una regularidad que sí se puede medir. La probabilidad es el número que mide esa regularidad, y con tres reglas —la de Laplace, la del producto y la de la suma— se resuelven casi todos los problemas que se plantean. Las dos herramientas que hacen el trabajo son el diagrama de árbol y la tabla de contingencia.

1. Experimentos aleatorios y sucesos

1.1. El experimento y su espacio muestral

Un experimento es **determinista** cuando, repetido en las mismas condiciones, da siempre el mismo resultado: soltar una piedra y medir el tiempo que tarda en caer un metro. Es **aleatorio** cuando no se puede predecir el resultado aunque se conozcan todas las condiciones de partida, pero sí se sabe de antemano cuáles son los resultados posibles.

DEFINICIÓN: ESPACIO MUESTRAL Y SUCESO

Se llama **espacio muestral** de un experimento aleatorio al conjunto de todos sus resultados posibles. Se representa por E (también se usa Ω).

Un **suceso** es cualquier subconjunto de E. Se dice que un suceso *ocurre* cuando el resultado del experimento es uno de los elementos que lo forman.

Los sucesos formados por un solo resultado se llaman **sucesos elementales**; los demás, **compuestos**. El propio E es el **suceso seguro** y el conjunto vacío $\varnothing$ es el **suceso imposible**.

Al conjunto de todos los sucesos de un experimento —es decir, al conjunto de todos los subconjuntos de E— se le llama **espacio de sucesos** y se escribe $\mathcal{P}(E)$. Si E tiene n elementos, $\mathcal{P}(E)$ tiene 2^n, porque cada resultado puede estar o no estar en el subconjunto.

EJEMPLO RESUELTO 1

Un servicio de asistencia técnica clasifica cada aviso que recibe según el aparato averiado: lavadora, frigorífico, horno o lavavajillas. Se elige al azar un aviso del día. Escribir el espacio muestral, decir cuántos sucesos hay y describir los sucesos $A = \{$lavadora, frigorífico$\}$ y $B = \{$horno$\}$.

El experimento es aleatorio porque no se sabe qué aviso saldrá, pero sí se conocen de antemano los resultados posibles. El espacio muestral es, entonces,

$$E = \{\text{lavadora},\ \text{frigorífico},\ \text{horno},\ \text{lavavajillas}\},$$

con cuatro elementos, de modo que hay $2^4 = 16$ sucesos, contando el suceso imposible y el suceso seguro.

A es un suceso compuesto: ocurre cuando el aviso es de lavadora o de frigorífico, es decir, cuando el aparato averiado es uno de esos dos. B es un suceso elemental: ocurre solo si el aviso es de horno.

1.2. Operaciones con sucesos

Los sucesos son conjuntos, y con ellos se opera como con conjuntos. Lo que hay que traducir bien es la frase del enunciado: casi siempre el problema consiste en reconocer qué operación esconde un «y», un «o» o un «no».

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

DEFINICIÓN: UNIÓN, INTERSECCIÓN, CONTRARIO Y DIFERENCIA

- **Unión**, $A \cup B$: ocurre cuando ocurre A, **o** B, o los dos. Se lee «A o B».
- **Intersección**, $A \cap B$: ocurre cuando ocurren **los dos a la vez**. Se lee «A y B». También se escribe AB.
- **Suceso contrario**, $\overline{A}$: ocurre exactamente cuando **no** ocurre A. Cumple $A \cup \overline{A} = E$ y $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
- **Diferencia**, $A - B$: ocurre A pero no B. Se puede escribir $A - B = A \cap \overline{B}$.

Dos sucesos son **incompatibles** (o excluyentes) cuando $A \cap B = \varnothing$: no pueden ocurrir a la vez. Si $A \cap B \neq \varnothing$ se llaman **compatibles**.

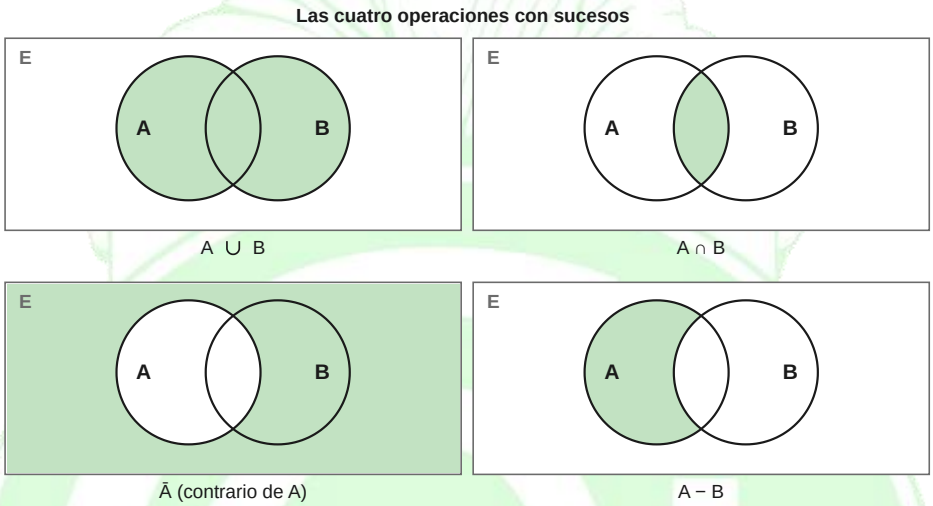


Figura 11.1. Las cuatro operaciones sobre un diagrama de Venn. El rectángulo es el espacio muestral E y la zona sombreada, el suceso resultante.

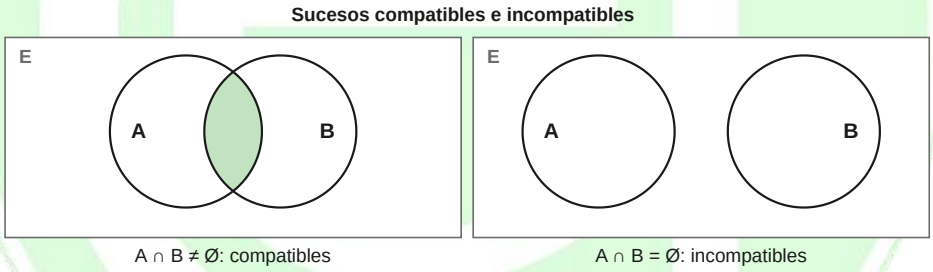


Figura 11.2. Dos sucesos son incompatibles cuando sus conjuntos no se solapan. Es una propiedad de los sucesos, no del experimento.

La unión y la intersección son **conmutativas** —$A \cup B = B \cup A$—, **asociativas** y **distributivas** una respecto de la otra:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

LEYES DE DE MORGAN

El contrario de una unión es la intersección de los contrarios, y el contrario de una intersección es la unión de los contrarios:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

En palabras: «no ocurre ninguno de los dos» equivale a «no ocurre A **y** no ocurre B»; y «no ocurren los dos a la vez» equivale a «falla A **o** falla B».

Estas dos leyes son la herramienta que convierte un enunciado incómodo en uno cómodo. «Ninguno de los tres aparatos falla» se calcula casi siempre como el contrario de «falla alguno», y «al menos uno falla» como el contrario de «no falla ninguno». Ese cambio de punto de vista es el que ahorra la mitad del trabajo, y volverá a aparecer en la distribución binomial.

EJEMPLO RESUELTO 2

Una tienda en línea envía cada pedido con dos servicios: el de transporte y el de aviso por mensaje. Sea T el suceso «el transporte llega a tiempo» y M el suceso «el aviso por mensaje se envía». Expresar con operaciones de sucesos: a) el pedido llega a tiempo y con aviso; b) falla al menos uno de los dos servicios; c) no falla ninguno; d) llega a tiempo pero sin aviso.

Se trata de traducir cada frase a una operación, con cuidado de qué es lo que se niega.

a) «Y» es intersección: $T \cap M$.

b) «Falla el transporte» es $\overline{T}$ y «falla el aviso» es $\overline{M}$. «Al menos uno falla» es que ocurra alguno de los dos, es decir, la unión: $\overline{T} \cup \overline{M}$. Por la ley de De Morgan, ese suceso es también $\overline{T \cap M}$, el contrario de a).

c) «No falla ninguno» es $\overline{\overline{T} \cup \overline{M}} = T \cap M$: coincide con a), como tenía que ser, porque es lo contrario de b).

d) «Pero sin» es una diferencia: $T - M = T \cap \overline{M}$.

Comprobación. Los sucesos de b) y de c) son contrarios uno del otro y los cuatro resultados posibles del experimento —los dos servicios bien, solo uno bien de dos maneras, y los dos mal— quedan repartidos sin solapamiento entre c) y b).

2. La probabilidad

2.1. De la frecuencia relativa a la probabilidad

Si un experimento aleatorio se repite n veces y un suceso A ocurre n_A veces, se llama **frecuencia absoluta** de A a n_A y **frecuencia relativa** al cociente $f_A = \dfrac{n_A}{n}$, que está siempre entre 0 y 1.

La frecuencia relativa de un mismo suceso cambia de una tanda de experimentos a otra, pero a medida que n crece deja de dar bandazos y se estabiliza alrededor de un número. Ese hecho experimental, la **ley de los grandes números**, es lo que da sentido a la palabra probabilidad.

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

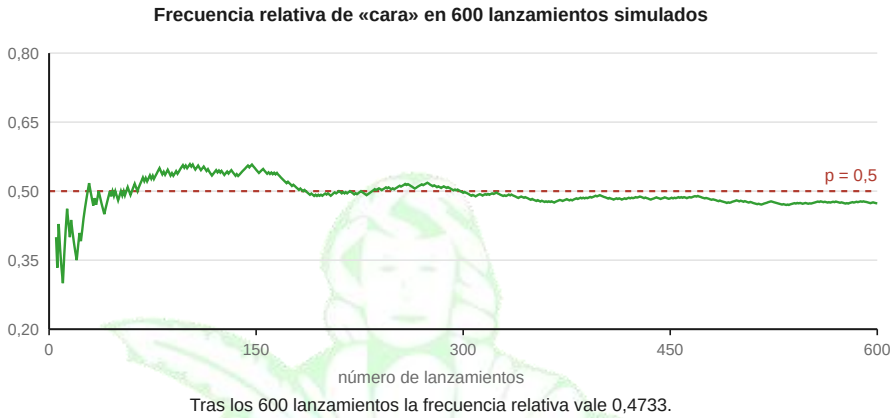


Figura 11.3. La frecuencia relativa de «cara» en una simulación de 600 lanzamientos. Al principio oscila mucho; después oscila cada vez menos alrededor de 0,5.

2.2. La regla de Laplace

Cuando todos los resultados de un experimento tienen la misma posibilidad de salir —se dice que el experimento es **equiprobable**, o que la elección se hace *al azar*— la probabilidad se calcula contando.

REGLA DE LAPLACE

Hipótesis: el espacio muestral E es finito y todos sus sucesos elementales son equiprobables. **Tesis:** para cualquier suceso A,

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}.$$

Si falla la hipótesis, la regla no vale. Al lanzar dos monedas, los resultados «dos caras», «una cara» y «ninguna cara» no son equiprobables: la de en medio ocurre de dos maneras distintas, y su probabilidad es $\frac{2}{4}$, no $\frac{1}{3}$. Contar mal el espacio muestral es un error muy frecuente.

EJEMPLO RESUELTO 3

En un aula de bachillerato hay 30 alumnos: 18 cursan Matemáticas II, 14 cursan Física y 9 cursan las dos asignaturas. Se elige un alumno al azar. Calcular la probabilidad de que curse Matemáticas II, la de que curse alguna de las dos y la de que no curse ninguna.

Al elegir al azar entre 30 alumnos todos los resultados son equiprobables, de modo que se puede aplicar la regla de Laplace con los 30 alumnos como casos posibles. Llamemos M al suceso «cursa Matemáticas II» y F a «cursa Física».

Los casos favorables a M son 18, y por tanto

$$P(M) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Para «alguna de las dos» hay que contar los alumnos de $M \cup F$. No se pueden sumar 18 y 14, porque los 9 que cursan las dos estarían contados dos veces; hay que descontarlos una:

$$\#(M \cup F) = 18 + 14 - 9 = 23 \implies P(M \cup F) = \frac{23}{30} \approx 0{,}7667.$$

«No cursa ninguna» es el contrario del anterior, y sus casos favorables son los $30 - 23 = 7$ alumnos restantes:

$$P(\overline{M \cup F}) = \frac{7}{30} \approx 0{,}2333.$$

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

Comprobación e interpretación. Los tres resultados están entre 0 y 1, y los dos últimos suman $\frac{23}{30}+\frac{7}{30}=1$, como debe ocurrir con dos sucesos contrarios. Algo más de tres de cada cuatro alumnos del aula cursa al menos una de las dos asignaturas.

2.3. Contar los casos posibles

La regla de Laplace exige contar, y contar bien es más difícil de lo que parece en cuanto hay más de un objeto en juego. Todo se apoya en una sola idea, el **principio de multiplicación**: si una elección se hace en dos pasos, y el primero se puede hacer de m maneras y el segundo, para cada una de ellas, de n, entonces el conjunto se puede hacer de $m\cdot n$ maneras. Con tres pasos, de $m\cdot n\cdot p$, y así sucesivamente.

A partir de ahí, todo depende de dos preguntas sobre el enunciado: **¿importa el orden?** y **¿se pueden repetir los objetos?**

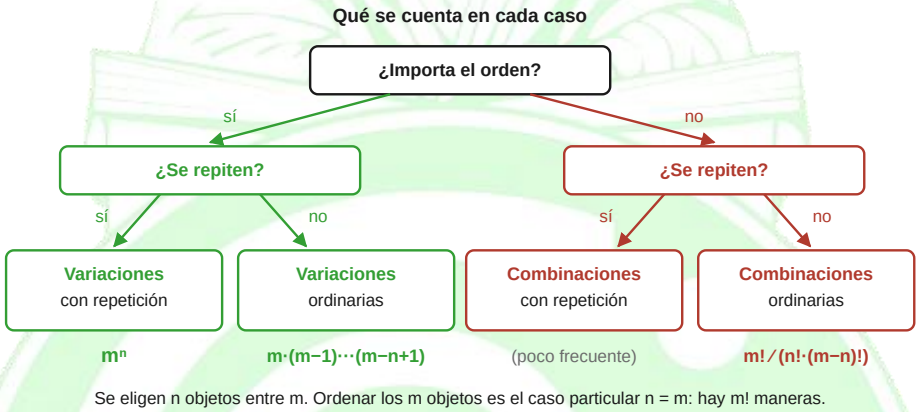


Figura 11.4. Las dos preguntas que deciden qué se cuenta. Casi todos los errores de recuento vienen de contestarlas deprisa.

LOS RECUENTOS QUE HACEN FALTA

Se eligen n objetos de entre m disponibles.

- **Variaciones con repetición.** Importa el orden y se pueden repetir: $\mathrm{VR}_{m,n}=m^n$. Es el caso de las contraseñas y de los experimentos que se repiten con reposición.
- **Variaciones ordinarias.** Importa el orden y no se repiten:

$$V_{m,n}=m\,(m-1)\,(m-2)\cdots(m-n+1)=\frac{m!}{(m-n)!}.$$

- **Permutaciones.** Se ordenan los m objetos, es decir, $n=m$: $P_m=m!$, con el convenio $0!=1$.
- **Combinaciones.** No importa el orden y no se repiten:

$$C_{m,n}=\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!\,(m-n)!}.$$

  El símbolo $\binom{m}{n}$ se llama **número combinatorio** y se lee «m sobre n».

Los números combinatorios cumplen unas propiedades que ahorran cuentas:

$$\binom{m}{0}=\binom{m}{m}=1,\qquad \binom{m}{1}=m,\qquad \binom{m}{n}=\binom{m}{m-n}.$$

La última dice que elegir n objetos para llevárselos es lo mismo que elegir los $m-n$ que se quedan, y convierte $\binom{20}{18}$ en $\binom{20}{2}=190$, que se calcula de cabeza.

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

EJEMPLO RESUELTO 4

Un club tiene 10 socios. a) ¿De cuántas maneras puede elegir un presidente, un secretario y un tesorero, sin que nadie ocupe dos cargos? b) ¿De cuántas maneras puede formar una comisión de tres socios, sin cargos? c) Si la taquilla del club se abre con un código de tres dígitos, ¿cuántos códigos hay?

a) Importa el orden —no es lo mismo ser presidente que tesorero— y nadie se repite: son variaciones ordinarias de 10 elementos tomados de 3 en 3.

$$V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 \text{ maneras.}$$

b) Ahora los tres elegidos hacen lo mismo, de modo que el orden no importa; siguen sin repetirse. Son combinaciones:

$$C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{720}{6} = 120 \text{ comisiones.}$$

c) En un código el orden importa y los dígitos se pueden repetir; hay 10 dígitos disponibles y 3 posiciones:

$$\mathrm{VR}_{10,3} = 10^3 = 1000 \text{ códigos.}$$

Comprobación. Cada comisión de tres socios se puede ordenar de $3! = 6$ maneras distintas, y $120 \cdot 6 = 720$: se recupera el resultado de a), que es justo la relación entre combinaciones y variaciones.

EJEMPLO RESUELTO 5

Una bolsa contiene 9 fichas: 2 blancas, 3 negras y 4 grises. Se sacan tres fichas a la vez. Hallar la probabilidad de que las tres sean de colores distintos.

Las tres fichas se sacan a la vez, de modo que el orden no importa y no hay repetición: los casos posibles son las combinaciones de 9 elementos tomados de 3 en 3.

$$\text{casos posibles} = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84.$$

Para que las tres sean de distinto color hay que tomar una de cada color, y por el principio de multiplicación eso se puede hacer de

$$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \text{ maneras.}$$

Todas las extracciones de tres fichas son igual de probables, así que se aplica la regla de Laplace:

$$P(\text{tres colores distintos}) = \frac{24}{84} = \frac{2}{7} \approx 0{,}2857.$$

Comprobación e interpretación. El resultado está entre 0 y 1, y es razonable: casi tres de cada diez extracciones darán las tres fichas de colores distintos.

2.4. Los axiomas y las propiedades que se usan

La regla de Laplace sirve cuando los resultados son equiprobables, pero no siempre lo son: un dado cargado, una máquina que produce un 3 % de piezas defectuosas o un test que acierta el 90 % de las veces no se estudian contando casos. Hace falta una definición que valga en todos los casos, y es la que dieron los axiomas de Kolmogórov.

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

AXIOMAS DE KOLMOGÓROV

Una **probabilidad** sobre el espacio muestral E es una aplicación P que asigna a cada suceso un número real y que cumple:

1. **No negatividad:** $P(A) \geq 0$ para todo suceso A.
2. **Normalización:** $P(E) = 1$.
3. **Aditividad:** si A y B son incompatibles, es decir $A \cap B = \varnothing$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Todo lo demás se deduce de estos tres. La regla de Laplace es un caso particular: la que se obtiene al repartir la probabilidad 1 a partes iguales entre los sucesos elementales.

PROPIEDADES

Sean A y B sucesos cualesquiera de E.

- **Probabilidad del contrario:** $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
  Por qué: A y $\overline{A}$ son incompatibles y su unión es E, luego $P(A) + P(\overline{A}) = P(E) = 1$.
- **Suceso imposible:** $P(\varnothing) = 0$, por ser el contrario de E.
- **Acotación:** $0 \leq P(A) \leq 1$. Todo resultado fuera de ese intervalo es un error de cálculo, sin excepción.
- **Monotonía:** si $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.
- **Probabilidad de la unión:**
  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
  Si A y B son incompatibles el último término es 0 y se recupera el tercer axioma.
- **Probabilidad de la diferencia:** $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

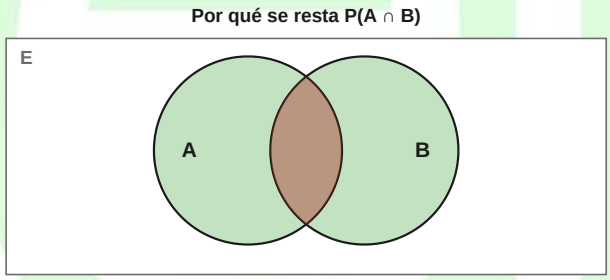


Figura 11.5. La razón de la resta: los resultados que están en A y en B se cuentan una vez al sumar $P(A)$ y otra al sumar $P(B)$, de modo que hay que descontarlos.

La fórmula de la unión se extiende a tres sucesos sumando y restando alternativamente, aunque rara vez hace falta:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice

EJEMPLO RESUELTO 6

Una plataforma de vídeo sabe que el 55 % de sus abonados ve series, el 40 % ve cine y el 25 % ve las dos cosas. Se elige un abonado al azar. Calcular la probabilidad de que: a) vea series o cine; b) no vea ninguna de las dos cosas; c) vea series pero no cine.

Sean S «ve series» y C «ve cine». Los datos del enunciado son $P(S) = 0{,}55$, $P(C) = 0{,}40$ y $P(S \cap C) = 0{,}25$. Obsérvese que el 25 % de las dos cosas está ya contado dentro del 55 % y dentro del 40 %.

a) Por la fórmula de la probabilidad de la unión,

$$P(S \cup C) = P(S) + P(C) - P(S \cap C) = 0{,}55 + 0{,}40 - 0{,}25 = 0{,}70.$$

b) «No ve ninguna de las dos» es $\overline{S} \cap \overline{C}$, que por la ley de De Morgan es $\overline{S \cup C}$. Por la probabilidad del contrario,

$$P(\overline{S} \cap \overline{C}) = P(\overline{S \cup C}) = 1 - P(S \cup C) = 1 - 0{,}70 = 0{,}30.$$

c) Es la diferencia $S - C$:

$$P(S - C) = P(S) - P(S \cap C) = 0{,}55 - 0{,}25 = 0{,}30.$$

Comprobación e interpretación. Los cuatro grupos en que queda repartido el público —solo series 0,30, solo cine 0,15, las dos cosas 0,25 y ninguna 0,30— suman 1, como tiene que ocurrir. Siete de cada diez abonados ven al menos uno de los dos tipos de contenido.

CÓMO SE RESUELVE: UN PROBLEMA CON PORCENTAJES Y DOS SUCESOS

1. **Nombre los sucesos con una letra** y escriba al lado, en palabras, qué significa cada una. Esa lista evita confundir unos sucesos con otros más adelante.
2. **Traduzca los datos** a probabilidades. Cuidado con las frases: «el 25 % ve las dos cosas» es $P(S \cap C)$, mientras que «de los que ven series, el 45 % ve cine» sería $P(C \mid S)$, que no es lo mismo.
3. **Traduzca la pregunta** a una operación de sucesos: «o» es unión, «y» es intersección, «no» es contrario, «pero no» es diferencia.
4. **Elija la fórmula** —la de la unión, la del contrario, la de la diferencia— y sustituya. Si la pregunta empieza por «al menos» o «ninguno», pruebe primero con el suceso contrario.
5. **Compruebe** que el resultado está entre 0 y 1 y que, si ha calculado varios sucesos que reparten todo el espacio, suman 1.
6. **Interprete el número** en los términos del enunciado, con una frase.

3. Probabilidad condicionada

3.1. Qué significa condicionar

Saber algo cambia la probabilidad. Si se elige al azar un habitante de una ciudad, la probabilidad de que mida más de 1,85 m es una; si además se sabe que juega en el equipo de baloncesto, es otra bien distinta. La información recibida no cambia el experimento: cambia el conjunto de casos posibles, que deja de ser E y pasa a ser el suceso que se sabe que ha ocurrido.

© Juan Marcos Sanmartín · Centro de Estudios Illice · Uso personal · Prohibida su distribución
Muestra gratuita · Centro de Estudios Illice